

Matematyka dla liceum/Funkcja liniowa

Funkcja liniowa

Wstęp

Co zawiera dział

Czytelnik pozna następujące informacje: co to jest i jakie ma własności funkcja liniowa oraz jej wykres. Jak się rozwiązuje równania liniowe. Jak rozwiązać nierówność. Przypadek dwóch niewiadomych w równości liniowej. Układ równań i jakimi metodami można go rozwiązać. Zastosowanie macierzy w rozwiązywaniu układu równań. Jak poradzić sobie z parametrem w równaniu. W zadaniach pojawią się przykłady zadań tekstowych i sposób ich zapisu w postaci funkcji liniowej.

Zakres programowy

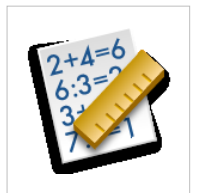
- wykres funkcji liniowej,
- wzór funkcji liniowej pozyskany z zadanych własności,
- rozwiązanie równania i nierówności liniowej z jedną niewiadomą,
- określenie liczby rozwiązań równania liniowego z jedną niewiadomą,
- rozwiązanie zadań tekstowych prowadzących do równań i nierówności liniowych z jedną niewiadomą,
- rozwiązanie algebraicznie i graficznie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi,
- rozwiązanie zadania tekstowego prowadzącego do układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Z zakresu programowego odeszło:

- (R) rozwiązanie układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi,
- (R) rozwiązanie układu dwóch równań liniowych z parametrem (w tym określenie liczby rozwiązań układu w zależności od parametru)

Informacje bazowe

Definicja

	DEFINICJA Funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b, x \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcją liniową.
---	--

Funkcja liniowa f , zapis:

$$f(x) = ax + b \text{ lub } y = ax + b \text{ lub też } f: y = ax + b$$

gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym, b wyrazem stałym.

Przykładowe funkcje liniowe

- $y = -4x + 1$
- $y = x$
- $f(x) = 6$ - funkcja stała
- $f(x) = \frac{3}{2}x$

- $f(x) = 5x + 7$

Przykłady

Podać wzór funkcji liniowej na podstawie własności

- Funkcja f przecina oś OX w punkcie -3 , czyli $(-3,0)$, natomiast oś OY w punkcie 3 , czyli $(0, 3)$. Znajdź wzór tej funkcji.

$$y = ax + b,$$

Za x i y podstawiamy współrzędne podanych punktów (x,y) :

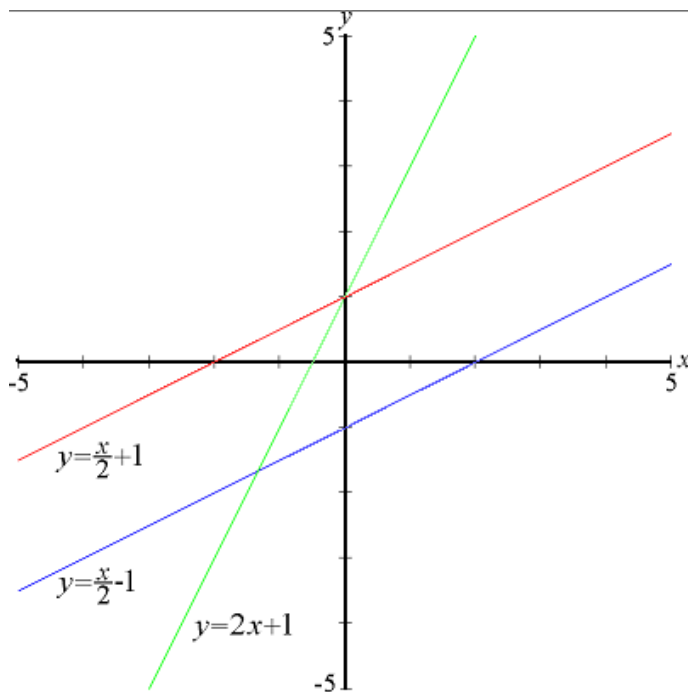
$$0 = -3a + b \quad 3 = 0 \cdot a + b.$$

Z ostatniego równania $3 = b$ otrzymujemy b , podstawiamy do poprzedniego otrzymując $0 = -3a + 3$, obliczamy a .

Ostatecznie otrzymujemy wzór funkcji: $f(x) = x + 3$

Wykres funkcji liniowej

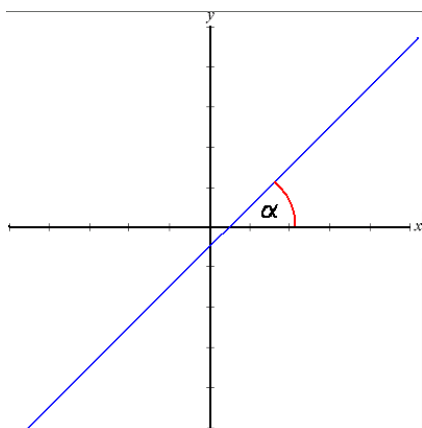
Wykresem funkcji liniowej jest **prosta**. Aby narysować wykres funkcji liniowej, wystarczy wyznaczyć współrzędne dowolnych dwóch punktów tej funkcji i poprowadzić przez nie prostą.



Prosta, która jest wykresem funkcji $y=ax+b$, nachylona jest do osi OX pod takim kątem, że

$$a = \operatorname{tg} \alpha \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

gdzie: a to współczynnik przy x , α to kąt między prostą a osią OX



Prosta przecina oś OY w punkcie $(0, b)$ oraz oś OX w punkcie $(-b/a, 0)$ – można to łatwo wyznaczyć z jej wzoru, $y = ax + b$ (podstawiając 0 za y lub za x).

$$\frac{x}{y}$$

TWIERDZENIE

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax$ jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych o współczynniku kierunkowym a .

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta przechodząca przez punkt $(0; b)$ o współczynniku kierunkowym a .

Własności funkcji liniowej

Dziedzina funkcji liniowej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych \mathbb{R} .

Miejsce zerowe funkcji jest punktem, w którym funkcja przecina oś OX, oblicza się je z $x_0 = -\frac{b}{a}$

Monotoniczność funkcji liniowej

- $a > 0$ funkcja rosnąca
- $a < 0$ funkcja malejąca
- $a = 0$ funkcja stała

Przykład

Funkcja $y = -3x + 1$ jest malejąca.

Parzystość

Funkcja jest *parzysta*, gdy $a = 0$ (funkcja stała).

Funkcja jest *nieparzysta*, gdy $b = 0$ (przechodzi przez środek układu wsp.) i $a \neq 0$.

Różnowartościowość

Funkcja jest różnowartościowa, jeśli $a \neq 0$, w przeciwnym wypadku nie jest różnowartościowa (jest stała i zawsze przyjmuje tę samą wartość).

Okresowość

$a \neq 0$ funkcja nie jest okresowa.

$a = 0$ funkcja jest okresowa (stała), jej okresem jest każda liczba \mathbb{R} .

Wykresy dwóch funkcji

Jeśli porównać wykresy dwóch funkcji, to mogą one być:

- równoległe, gdy $a_1 = a_2$ – oba współczynniki są równe
- prostopadłe, gdy $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

Przykład

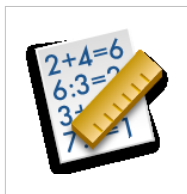
Wykresy funkcji: $f(x) = 3x + 1$ i $g(x) = 3x - 7$ są liniami równoległymi do siebie.

Równanie liniowe z jedną niewiadomą

Przykładem równania liniowego może być:

- $2x + 3 = 5$
- $-x + 2 = 0$
- $\frac{7x+2}{2} = 6$

Rozwiązaniem równania jest liczba x , która spełnia to równanie.



DEFINICJA

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą nazywamy równanie, które **można zapisać** w postaci $ax + b = 0$, gdzie x jest niewiadomą.

Aby rozwiązać równanie liniowe, czyli aby znaleźć liczbę x , przeważnie trzeba wykonać następujące czynności:

- przenieść niewiadomą na jedną stronę równania, pozostawiając liczby (bądź parametry) po drugiej stronie (przy przenoszeniu zmieniamy znak),
- wymnożyć lub podzielić obustronnie przez wartość tak, aby pozbyć się liczby stojącej przy niewiadomej.

Wyjaśnienie

- Aby rozwiązać równanie $2x + 3 = 5$, wykonamy kolejne kroki wymienione powyżej.

Po lewej stronie równania zostawimy niewiadomą, przenosząc liczbę 3 na prawą stronę. Wystarczy zapisać ją po drugiej stronie ze zmienionym znakiem.

$$2x = 5 - 3 \quad \text{czyli} \quad 2x = 2$$

Aby z wyrażenia $2x$ uzyskać x , dzielimy przez 2. **Zawsze dzielimy obie strony**, czyli

$$2x = 2 \quad / : 2$$

$x = 1$, tak więc liczba 1 jest rozwiązaniem.

Przy przekształcaniu równania należy pamiętać o tym, że **przenosząc** pewną liczbę z jednej strony na drugą, należy **zmienić znak na przeciwny**, na przykład:

- jeśli $2x + 5 = 6$, to $2x = 6 - 5$,
- jeśli $x - 4 = 2$, to $x = 2 + 4$.

Jeśli chcemy **wymnożyć** lub **podzielić** równanie przez pewną liczbę, wówczas zapisujemy to dodając na końcu np. " $\cdot 4$ " lub np. " $: 3$ ".

- $\frac{x}{2} = 3 \quad / \cdot 2$ - obustronnie mnożymy przez 2
- $3x = 6 \quad / : 3$ - obustronnie dzielimy przez 3
- $\frac{3}{4}x = 2 \quad / \cdot \frac{4}{3}$ - obustronnie mnożymy przez ułamek $\frac{4}{3}$.

Przykłady

- Równanie $-x + 2 = 0$

$$-x = 0 - 2$$

$$-x = -2 \quad / \cdot (-1)$$

$$x = 2$$

- Równanie $\frac{7x+2}{2} = 6$

Pozbywamy się ułamka, mnożąc przez wartość mianownika.

$$\frac{7x + 2}{2} = 6 \quad / \cdot 2$$

$$7x + 2 = 12$$

$$7x = 10 \quad / : 7$$

$$x = \frac{10}{7}$$

Rozwiązania

Jeżeli nie są podane wartości współczynników a i b , wówczas możemy postawić następujące założenia:

- jeśli $a \neq 0$, to istnieje **jedno rozwiązanie** $x = -\frac{b}{a}$,
- jeśli $a = 0$ i $b = 0$, to równanie przyjmie postać $0 = 0$. Jest to **równanie tożsamościowe** i dla każdego x jest **prawdą** (czyli rozwiązaniem jest każda liczba),
- jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$, wówczas równanie może wyglądać np. tak: $0 = 3$, co oczywiście jest fałszem.

Równanie to nazywa się **równaniem sprzecznym** i nie istnieje liczba, która je spełnia (brak rozwiązań).


Inną nazwą *rozwiązania równania* jest też **miejsce zerowe**, jak i **pierwiastek**.

Nierówność liniowa z jedną niewiadomą

Zacznijmy od kilku przykładów:

- $2x > 3$
- $5x - 2 < 2$
- $-2x + 4 \geq -3x + 5$
- $-\frac{1}{2}x + 3 \geq 5$

Zanim je rozwiążemy, spójrzmy na definicję:

	<p>DEFINICJA</p> <p>Nierówność liniową z jedną niewiadomą można zapisać w postaci np. $ax + b > 0$, gdzie niewiadomą jest x.</p> <p>Inne postacie: $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ lub $ax + b \leq 0$.</p>
---	---

Ważna uwaga: przy mnożeniu (lub dzieleniu) nierówności przez liczbę ujemną, znak nierówności zmieniamy na przeciwnie skierowany (np. $>$ na $<$).

Przejdźmy do rzeczy, czyli rozwiążmy przedstawione przykłady.

Zacniemy od $2x > 3$:

$$2x > 3 \quad / : 2$$

$$x > 1\frac{1}{2}$$

Rozwiązaniem tej nierówności nie jest jedna liczba, a cały zbiór liczb większych od jednego i jednej drugiej.

$$\text{Odp. } x \in \left(1\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Teraz możemy przejść do kolejnego przykładu $-2x + 4 \geq -3x + 5$:

$$-2x + 3x \geq 5 - 4$$

$$x \geq 1$$

$$\text{Odp. } x \in \langle 1; +\infty \rangle.$$

Rozwiążmy teraz nierówność $-5x - 2 < 2$:

$$-5x < 2 + 2$$

$$-5x < 4 \quad /:(-5)$$

$x > -\frac{4}{5}$ przy mnożeniu przez liczbę ujemną trzeba zmienić znak nierówności na przeciwny.

$$\text{Odp. } x \in \left(-\frac{4}{5}; \infty\right).$$

Dlaczego gdy mnożymy lub dzielimy przez liczbę ujemną, znak nierówności trzeba zmienić? Słuszność tego możemy sprawdzić na przykładzie:

$$3 < 4 \quad / \cdot (-2)$$

$$-6 < -8 \quad \text{- fałsz, brakuje zmienionego znaku}$$

$$-6 > -8 \quad \text{- prawda, zmieniony znak na '>'}$$

Równanie z parametrem (R)

Dla jakich wartości parametru p funkcja $y=2px+4-p$ jest malejąca oraz nieparzysta?

Musimy ustalić warunki, które musi spełniać to równanie, aby założenia z zadania były spełnione .

1. $a < 0$ aby funkcja była malejąca
2. Wykres funkcji musi przechodzić przez punkt $(0,0)$ aby funkcja była nieparzysta. W przypadku funkcji nieparzystej $f(x)=ax+b$ zachodzi $b=0$, zatem w naszym przypadku zachodzi $4-p=0$

$$\bullet \begin{cases} 2p < 0 \\ 4 - p = 0 \end{cases}$$

Mamy:

$$\bullet \begin{cases} p < 0 \\ p = 4 \end{cases}$$

Teraz musimy złączyć oba te warunki, aby otrzymać wynik.

Układ równań z dwiema niewiadomymi

Układ równań z dwiema niewiadomymi, jak sama nazwa wskazuje, jest to układ dwóch lub więcej równań, w których mamy dwie niewiadome, np. x i y .

Spójrzmy na kilka przykładowych układów równań:

$$\bullet \begin{cases} 2x + 1 = 3y \\ x - 5 = y \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} -3x - 6y + 4 = 0 \\ 5x - 5 = y \end{cases}$$

Poznamy trzy możliwości rozwiązywania takich układów.

Metoda podstawiania

Metoda podstawiania polega na wyznaczeniu pewnej zmiennej z jednego równania i wstawieniu do drugiego. Rozwiążmy w ten sposób pierwszy układ:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 3y & (1.1) \\ x - 5 = y & (1.2) \end{cases}$$

Najpierw wyznaczmy sobie którąś niewiadomą - w tym układzie najlepiej x (1.2), czyli:

$$y = x - 5$$

i w takiej wersji możemy podstawić do (1.1):

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 3 \cdot (x - 5) \\ 2x + 1 &= 3x - 15 \end{aligned}$$

i otrzymujemy:

$$x = 16$$

Mamy już x . Teraz wystarczy do (1.2) podstawić znaleziony x , więc:

$$y = 16 - 5 = 11.$$

Odp. $x = 16$ i $y = 11$

Drugim wariantem tej metody jest początkowe wyznaczenie x z (1.1), czyli:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 3y \\ 2x &= 3y - 1 \quad /:2 \\ x &= \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \quad (1.2') \end{aligned}$$

i możemy podstawić do (1.2). Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} - 5 &= y \\ \frac{3}{2}y - 5\frac{1}{2} &= y \\ \frac{3}{2}y - y &= 5\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y &= 5\frac{1}{2} \quad / \cdot 2 \\ y &= 11. \end{aligned}$$

Mamy już y . Teraz wystarczy do (1.2') podstawić znaleziony y , więc:

$$x = \frac{3}{2} \cdot 11 - \frac{1}{2} = \frac{33}{2} - \frac{1}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

Odp. $x = 16$ i $y = 11$.

Drugi układ

$$\begin{cases} -3x - 6y + 4 = 0 \\ 5x - 5 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 6(5x - 5) + 4 = 0 \\ y = 5x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 30x + 30 + 4 = 0 \\ y = 5x - 5 \end{cases}$$

$$-33x = -34 \quad / : (-33)$$

$$x = \frac{34}{33}$$

$$y = 5 \cdot \frac{34}{33} - 5$$

$$y = \frac{170}{33} - 5$$

$$y = \frac{5}{33}$$

$$x = \frac{34}{33}$$

Jak widać, wybór niewiadomej, którą chcemy wyznaczyć na początku, nie wpływa na wynik. Jednak dobrze wybrana, może czasami znacznie ułatwić zadanie.

Metoda przeciwnych współczynników

Metoda przeciwnych współczynników polega na przekształceniu jednego lub obu równań w taki sposób, aby współczynniki przy jednej zmiennej w obu równaniach miały przeciwne wartości. Rozwiążmy w ten sposób ponownie pierwszy układ:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 3y & (1.1) \\ x - 5 = y & (1.2) \end{cases}$$

Współczynnik przy zmiennej x w równaniu (1.2) powinien mieć wartość -2 , czyli:

$$\begin{aligned} x - 5 = y & \quad / \cdot (-2) \\ -2x + 10 = -2y & \end{aligned}$$

Teraz należy wstawić to do układu:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 3y & (1.1) \\ -2x + 10 = -2y & (1.2) \end{cases}$$

i dodać stronami:

$$\begin{aligned} 2x + (-2x) + 11 &= 3y + (-2y) \\ 11 &= y \end{aligned}$$

Mamy już y . Teraz wystarczy do (1.1') lub (1.2') podstawić znaleziony y , więc:

$$\begin{aligned} x - 5 &= 11 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Odp. $x = 16$ i $y = 11$.

Drugi przykład:

$$\bullet \begin{cases} -3x - 6y + 4 = 0 \\ 5x - 5 = y \end{cases}$$

Przenosimy zmienną y na lewą stronę, a po prawej piszemy 0.

$$\begin{cases} -3x - 6y + 4 = 0 \\ 5x - 5 - y = 0 \quad / \cdot (-6) \end{cases}$$

Teraz mnożymy obustronnie, aby przy y była taka sama cyfra i przeciwny znak.

$$\begin{cases} -3x - 6y + 4 = 0 \\ -30x + 30 + 6y = 0 \end{cases}$$

Teraz rozwiązujemy.

$$-3x - 6y + 4 - 30x + 30 + 6y = 0$$

Po rozwiązaniu zostaje nam takie równanie:

$$-33x + 34 = 0$$

Przenosimy na drugą stronę, aby podzielić obustronnie.

$$-33x = -34 \quad / : (-33)$$

Ostatecznie x wynosi:

$$x = \frac{34}{33}$$

Podstawiamy x i wyliczamy.

$$5 \cdot \frac{34}{33} - 5 = y$$

$$\frac{170}{33} - 5 = y$$

Gdy sprowadziliśmy do wspólnego mianownika wyszedł nam y .

$$y = \frac{5}{33}$$

$$\text{Odpowiedź } x = \frac{34}{33} \text{ i } y = \frac{5}{33}$$

Metoda graficzna

Metoda graficzna polega na przekształceniu równania do postaci kierunkowej, następnie narysowaniu prostych na układzie współrzędnych i na końcu odczytania współrzędnych punktu przecięcia prostych.

Zróbmy taki przykład

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

Przekształcamy układ to postaci kierunkowej

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 4 - \frac{2}{3}x \end{cases}$$

Następnie rysujemy proste w układzie współrzędnych i odczytujemy punkty przecięcia prostych. W tym przypadku są to punkty:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Metoda wyznacznikowa

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Jeśli $W \neq 0$, to układ równań ma jedno rozwiązanie $x = \frac{W_x}{W}$ i $y = \frac{W_y}{W}$.

Jeśli $W = 0$ i $W_x = 0$ i $W_y = 0$ to układ równań jest nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań).

Jeśli $W = 0$ i $W_x \neq 0 \vee W_y \neq 0$ to układ równań jest sprzeczny.

Przykład

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 5x + y = 17 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 5 = 2 - 25 = -23$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} = 16 \cdot 1 - 17 \cdot 5 = 16 - 85 = -69$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} = 2 \cdot 17 - 5 \cdot 16 = 34 - 80 = -46$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-69}{-23} = 3$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{-46}{-23} = 2$$



Do zrobienia:

- napisać, co to jest układ zależny, niezależny i sprzeczny
- parametr

Podsumowanie

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą jest

- równanie postaci $ax + b = 0$ (lub każde dające się sprowadzić do tej postaci), gdzie x jest niewiadomą oraz a i b są dowolnymi liczbami (lub parametrami).

Równanie liniowe rozwiązujemy następująco

- przeniesienie niewiadomej na jedną stronę, a liczb (bądź parametrów) na drugą,
- wymnożenie lub podzielenie obu stron przez wartość tak, aby pozbyć się liczby przy niewiadomej x (np. $3x = 9 \rightarrow x = 3$),
- przy przenoszeniu liczby na drugą stronę równania, zmieniamy jej znak na przeciwny.

Rozwiązania równania liniowego

- $a \neq 0$ - równanie ma jedno rozwiązanie (np. $0=3x+1$)
- $a = 0, b = 0$ - równanie jest tożsamościowe (np. $0=0$)
- $a = 0, b \neq 0$ - równanie jest sprzeczne (brak miejsc zerowych) (np. $0=2$)

Układ równań liniowych

Metody:

- podstawiania - polega na wyznaczeniu pewnej zmiennej z jednego równania i wstawieniu do drugiego
- przeciwnych współczynników - polega na przekształceniu jednego lub obu równań w taki sposób, aby współczynniki przy jednej zmiennej w obu równaniach miały przeciwne wartości.
- graficzna - polega na przekształceniu równania do postaci kierunkowej, następnie zaznaczeniu prostych na układzie współrzędnych i odczytania współrzędnych punktu przecięcia prostych.
- wyznaczniki - polega na wyznaczeniu wyznaczników i na podstawie ich wartości przeprowadzenie analizy rozwiązań układu równań.

Zadania z rozwiązaniami

Zad.1 Wyznacz miejsce zerowe funkcji $y = 3x + 5$

Rozwiązanie

$$y = 3x + 5$$

$$0 = 3x + 5$$

$$-3x = 5 \quad / : (-3)$$

$$x = \frac{-5}{3}$$

Zad.2 Napisz wzór prostej prostopadłej do prostej $y = -4x + 3$ i przechodzącej przez punkt $A(1,2)$.

Rozwiązanie

$$a \cdot a_1 = -1 \quad / : a_1$$

$$a = \frac{-1}{a_1}$$

$$y = -4x + 3$$

$$a \cdot (-4) = -1$$

$$-4a = -1 \quad / : (-4)$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$A(x = 1, y = 2)$$

$$2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + b$$

$$2 = \frac{1}{4} + b$$

$$2 - \frac{1}{4} = b$$

$$\frac{7}{4} = b$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

Zad.3 Janek kupił dwa chleby i trzy oranżady płacąc 13 zł. Drugiego dnia za trzy chleby i cztery oranżady zapłacił 5 zł więcej, niż poprzedniego dnia. Ile kosztuje jeden chleb i jedna oranżada?

Rozwiązanie (metoda przeciwnych współczynników)

x - chleb

y - oranżada

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 / \cdot (-3) \\ 3x + 4y = 18 / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 9y = -39 \\ 6x + 8y = 36 \end{cases}$$

$$-6x - 9y + 6x + 8y = -39 + 36$$

$$-y = -3 \quad / : (-1)$$

$$y = 3$$

$$2x + 3 \cdot 3 = 13$$

$$2x + 9 = 13$$

$$2x = 13 - 9$$

$$2x = 4 \quad / : 2$$

$$x = 2$$

Odpowiedź: Chleb kosztuje 2 zł, a oranżada 3 zł.

Zad.4 Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ 2y + z = 2 \\ 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + x - z = -4 \\ z = 2 - 2y \\ 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + x - (2 - 2y) = -4 \\ z = 2 - 2y \\ 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 + x - 2 + 2y = -4 \\ z = 2 - (-2) \\ 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 + 2 + 2 + 2 \\ z = 4 \\ 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \\ 2y = -2 \quad / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

1. Na przejechanie 60 km samochód zużywa 4,8 litra benzyny

1. ile kilometrów przejedzie samochód, mając w baku 12,8 litra benzyny?
2. ile litrów benzyny potrzebuje ten samochód na przejechanie 255 km?
3. podaj wzór wyrażający zużycie paliwa w litrach w zależności od liczby x przebytych przez samochód kilometrów.

Źródła i autorzy artykułu

Matematyka dla liceum/Funkcja liniowa Źródło: <http://pl.wikibooks.org/w/index.php?oldid=81964> Autorzy: Lethern, Piotr

Źródła, licencje i autorzy grafik

Grafika:Exquisite-kspread.png Źródło: <http://pl.wikibooks.org/w/index.php?title=Plik:Exquisite-kspread.png> Licencja: GNU General Public License Autorzy: Bayo, It Is Me Here, Rocket000, Sasa Stefanovic, Wondigoma

Plik:Linear functions2.PNG Źródło: http://pl.wikibooks.org/w/index.php?title=Plik:Linear_functions2.PNG Licencja: GNU Free Documentation License Autorzy: Juiced lemon, KES47, Maksim, Qef, 1 anonimowych edycji

Plik:Kąt nachylenia prostej.PNG Źródło: http://pl.wikibooks.org/w/index.php?title=Plik:Kąt_nachylenia_prostej.PNG Licencja: Public Domain Autorzy: Lethern

Grafika:Nuvola_apps_kbrunch.png Źródło: http://pl.wikibooks.org/w/index.php?title=Plik:Nuvola_apps_kbrunch.png Licencja: nieznany Autorzy: Alno, Alphax, GJo, It Is Me Here, Militaryace, Rocket000, ThePlaz

Grafika:Evolution-tasks.png Źródło: <http://pl.wikibooks.org/w/index.php?title=Plik:Evolution-tasks.png> Licencja: GNU General Public License Autorzy: Artwork by Tuomas Kuosmanen <tigert_at_ximian.com> and Jakub Steiner <jimmac_at_ximian.com>

Licencja

Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0
[//creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)